Πιθανότητες 19/1 ①

Ασκήσεις από Φυλλάδια

4) Φυλλάδιο επαναληπτικών

α. Νόμισμα 10 φορές → 6 Κ.
Αναμενόμενος αριθμός Γ → 5 ρίψεις? $P(K) = \frac{6}{10}$

β. 6 φοιτητές την ώρα

(i) P (να επισκεφτούν το γραφείο 3 φοιτητές μεταξύ 10:00-10:45 πρωί)

(ii) P (ο αμέσως επόμενος φοιτητής να περιμένει μεταξύ 5 και 10 λεπτών)

Λύση

α. Έστω $E = \{$να έρθει Γ σε οποιαδήποτε ρίψη$\}$
Έστω τ.μ. X παριστά τον αριθμό των E (αριθμό Γ) στις 5 ρίψεις (επαναλήψεις)

$X \sim B(n=5,\ p = P(E) = P(\Gamma) = \frac{2}{5})$

$p = P(\Gamma) = 1 - P(K) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$

$E(X) = np = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2$

β.(i) Έστω X πλήθος φοιτητών που επισκέπτονται το γραφείο μεταξύ 10:00 - 10:45

$X \sim P(\lambda = ?)$

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x=0,1,2,\dots$$

Στα 60 min   6 φορές

45 min   λ-?

$$\lambda = \frac{6 \times 45}{60} = \frac{9}{2}$$

Άρα $P_X(x) = \dfrac{e^{-9/2}(9/2)^x}{x!} \qquad x=0,1,2,\dots$

$$P(X=3) = P_X(3) = \frac{e^{-9/2}(9/2)^3}{3!} = 0,1683$$

(ii) Έστω Y η τ.μ. που παριστά τον χρόνο που περιμένει ο αφιξεως επόμενως. Το Y ουσιαστικά παριστά τον χρόνο μεταξύ 2 διαδοχικών αφίξεων σε διαδικασία Poisson

$Y \sim Εκθ(\lambda=?)$

Στα 60 min → 6 φοιτ.

1 min → λ?

$$\lambda = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}, \quad F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{1}{10}x}$$

$$P(5 \le Y \le 10) = \begin{cases} \int_5^{10} f_Y(y)\,dy \\ F_Y(10) - F_Y(5) \end{cases} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = 0,2386$$

5) Φυλλάδιο επαναληπτικών

α. βάρος $\sim N(5, 16)$

(i) P(ένα κιβώτιο να ζυγίζει μεταξύ 1 και 10kg)

(ii) P(" περισσότερο από 9 kg)

β. Εξετάζεται το βάρος 4 κιβωτίων

P(και τα 4 να έχουν βάρος > 9 kg)

γ. X συνεχής και $\exists$ η $E(X)$, $E(aX+b) = aE(X)+b$

Λύση

α. $X \sim N(\mu=5, \sigma^2=16)$

(i) $P(1 \le X \le 10) \leftarrow$ πίνακες

τυποποίηση

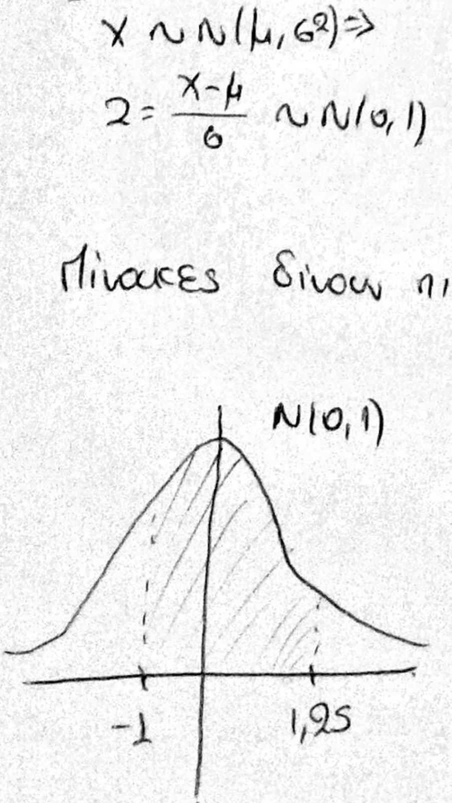
$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$P\left(\frac{1-5}{4} \le \frac{X-5}{4} \le \frac{10-5}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 1{,}25)$$

θετικό

Πίνακες δίνουν πιθανότητες της μορφής $P(0 \le Z \le z_0)$



$= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1{,}25) =$

$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 1{,}25) =$

$0{,}3413 + 0{,}3944$

(ii) $P(X>9) = \dots = 0,1587$

β. $E = \{$ένα κιβώτιο να έχει βάρος $> 9kg\}$

Έστω Y τ.μ. περιγράφει το πλήθος των E στα 4 κιβώτια που εξετάζονται.

$Y \sim B(n=4, p=P(E))$

$p = P(E) = P(X>9) = 0,1587$

$P_Y(y) = \binom{4}{y}(0,1587)^y(1-0,1587)^{4-y}$ $\quad y=0,1,2,3,4$

$P(Y=4) = P_Y(4) = \binom{4}{4}(0,1587)^4(1-0,1587)^0 = 0,0006343$

γ $E(aX+b) = \int (ax+b) f_X(x)\,dx = a\int x f_X(x)\,dx + b\overbrace{\int f_X(x)\,dx}^{1} =$

$= aE(X) + b$

2b) Φυλλάδιο 2

52 -> 4 παίκτες

Αν οι 2 παίκτες έχουν τα 8 ♦ (από τα 13)

P(ο 3ος παίκτης να έχει 3♦ από τα υπόλοιπα 5♦)

Λύση

$$\frac{\binom{5}{3}\times\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}}$$

3α) Φυλλάδιο 2ο

Ο Διευθυντής έχει 2 παιδιά.

P(να είναι και τα 2 αγόρια
δεδομένου ότι συμμετέχει στο πάρτυ)

Λύση

Θεωρώ τα ενδεχόμενα

$A = \{$ Ο Διευθυντής έχει 2 αγόρια $\}$

$B = \{$ Ο Διευθυντής συμμετέχει $\} = \{$ έχει τουλ. ένα αγόρι $\}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Δειγματικός χώρος

$S \leftarrow 2$ παιδιά

$S = \{AA, AK, KA, KK\}$

A: αγόρι
K: κορίτσι

$A = \{AA\}$

$B = \{AK, KA, AA\}$

$A \cap B = \{A, A\}$

Άρα $P(A/B) = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$

3γ) Φυλλάδιο 2ο

K1 ← πιθανότητα ατυχ = 0,4

K2 ← πιθανότητα ατυχ = 0,2

Το 30% ανήκει στην K1

(i) P (Ένας νέος ασφαλισμένος να έχει ατύχημα)

~~(ii) ασφαλισμένος έχει ατύχημα~~

(ii) Ένας ασφαλισμένος να ανήκει στην K1 δεδομένου ότι έχει ατύχημα

Λύση

(i) Από Θ.Ο.Π.

$$P(A) = P(A/K1)\,P(K1) + P(A/K2)\cdot P(K2) =$$

$$= 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}12 + 0{,}14 = 0{,}26$$

(ii) $P(K_1/A) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(A/K_1)P(K_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}26} = \dfrac{0{,}12}{0{,}26}$